Казанский федеральный университет
Институт вычислительной математики и информационных технологий
Кафедра математической статистики

О. Е. Тихонов

МЕРЫ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Учебное пособие

Казань – 2014

УДК 519.212

Рекомендовано на заседании кафедры математической статистики.

Протокол № 2 от 2 октября 2014 года.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Е. А. Турилова.

Тихонов О.Е. Меры и условные математические ожидания / О.Е. Тихонов. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 30 с.

Пособие предназначено для студентов института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по профилю "Теория вероятностей и математическая статистика".

Приведены подробные доказательства фундаментальных результатов теории меры: разложения Хана–Жордана, теоремы Лебега о разложении меры. В рамках абстрактной теории вероятностей изучается понятие условного математического ожидания. Разобраны примеры, иллюстрирующие используемые понятия и доказанные утверждения. Сформулированы упражнения, связанные с приведенными теоретическими результатами.

Оглавление

Используемые обозначения

Как обычно, через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ будем обозначать множества натуральных и действительных чисел соотвественно, через $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенную числовую прямую $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Мы будем использовать достаточно стандартное обозначение "$+$" и "$\sum$" для объединения двух и большего числа непересекающихся множеств (несовместных событий). Знак "$-$" для множеств (событий) будем использовать в согласованности с использованием "$+$": если $A \subset B$, то будем писать $B - A$ для обозначения разности $B \setminus A = B \cap A^c$.

Для подмножества A множества Ω через 1_A обозначаем индикатор A, то есть отображение из Ω в $\mathbb{R}$, заданное равенством

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \in A^c. \end{cases}$$

Для вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *ступенчатой случайной величиной* называется случайная величина вида $X = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i 1_{A_i}$, где $A_i \in \mathcal{A}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i = \Omega$, $x_i \in \mathbb{R}$. Другими словами, ступенчатой называется случайная величина, принимающая конечное число значений. Заметим, что понятие ступенчатой случайной величины не связано с вероятностью, а только с σ-алгеброй событий. Совокупность всех ступенчатых случайных величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ будем обозначать $\mathrm{St}(\Omega, \mathcal{A})$, положительных — $\mathrm{St}^+(\Omega, \mathcal{A})$.

Символ E будем использовать для обозначения математических ожиданий интегрируемых случайных величин.

1 Меры

1.1 Алгебры и σ-алгебры множеств (событий)

Напомним определения алгебры и σ-алгебры.

Определение 1.1. Класс $\mathcal{A}$ подмножеств некоторого множества Ω называется *алгеброй,* если он удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$;

(2) если $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$;

(3) если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$.

Замечание 1.1.1. Условия (1)–(3) можно существенно ослабить, а именно, в определении алгебры потребовать выполнения условий

$(1)'$ класс $\mathcal{A}$ непуст;

$(2)' = (2)$;

$(3)'$ если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Действительно, если класс $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям $(1)' - (3)'$, то он удовлетворяет и $(1) - (3)$: возьмем $A \in \mathcal{A}$, тогда $A^c \in \mathcal{A}$, следовательно, $\varnothing = A \cap A^c \in \mathcal{A}$ и $\Omega = \varnothing^c \in \mathcal{A}$; если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$.

Пример 1.1.1 ([1], упр. 1.1). Пусть Ω — некоторое множество и

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega\colon \text{ либо } A \text{ конечно, либо } A^c \text{ конечно}\}.$$

Проверим, что класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω является алгеброй, руководствуясь замечанием 1.1.1.

1) Класс $\mathcal{A}$ непуст, так как, очевидно, $\varnothing \in \mathcal{A}$.

2) Если $A \in \mathcal{A}$, то, как видно из определения класса $\mathcal{A}$, множество A^c также принадлежит $\mathcal{A}$.

3) Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$, так как в случае, когда конечно хотя бы одно из множеств A, B, конечно и $A \cap B$, а в случае, когда конечны и A^c и B^c, конечно и множество $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Определение 1.2. Алгебра $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если выполняется условие

$$A_i \in \mathcal{A}\ (i \in I),\ I \text{ счетно} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Замечание 1.1.2. Если $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, I счетно и $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I)$, то $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, так как $\bigcup_{i \in I} A_i = \big(\bigcap_{i \in I} A_i^c\big)^c$.

1.2 Аддитивные и σ-аддитивные функции множества

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый класс подмножеств множества Ω. Отображение $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *функцией множества.* Функция множества называется *аддитивной,* если выполняется условие:

$$A, A_i \in \mathcal{E}\ (i \in I),\ I \text{ конечно},\ A = \sum_{i \in I} A_i \implies \mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Функция множества называется σ-*аддитивной,* если выполняется условие:

$$A, A_i \in \mathcal{E}\ (i \in I),\ I \text{ конечно или счетно},\ A = \sum_{i \in I} A_i \implies$$
$$\implies \mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Любая σ-аддитивная функция множества, конечно, является аддитивной. Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 1.2.1 (см. [1], упр. 2.2). Рассмотрим алгебру (пример 1.1.1)

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \colon \text{ либо } A \text{ конечно, либо } A^c \text{ конечно}\}$$

и определим на ней функцию:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ конечно,} \\ 1, & \text{если } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Покажем, что μ аддитивна. Пусть $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I)$, I конечно и $A = \sum_{i \in I} A_i$. (Тогда, автоматически, $A \in \mathcal{A}$.) Возможны два случая.

1) Все множества A_i $(i \in I)$ конечны. Тогда A конечно, следовательно, $\mu(A) = 0 = \sum\limits_{i \in I} \mu(A_i)$.

2) Среди A_i $(i \in I)$ есть бесконечное множество, пусть это A_{i_0}. Тогда A бесконечно и, по определению алгебры $\mathcal{A}$, конечно множество $A_{i_0}^c$. Так как $A_i \subset A_{i_0}^c$ при $i \neq i_0$, то A_i конечно при $i \neq i_0$. Таким образом, $\mu(A_{i_0}) = 1$, $\mu(A_i) = 0$ при $i \neq i_0$ и $\mu(A) = 1$, то есть $\mu(A) = \sum\limits_{i \in I} \mu(A_i)$.

Чтобы убедится в том, что μ не является σ-аддитивной, достаточно заметить, что $\mathbb{N} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{n\}$, но $\mu(\mathbb{N}) = 1 \neq 0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\})$.

1.3 Определения, примеры и действия с мерами

Определение 1.4. *Мерой* на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется σ-аддитивная функция $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющая условию $\mu(\varnothing) = 0$.

Меры являются функциями множества, и на них переносятся обычные определения различных свойств функций.

Определение 1.5. Мера μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется:

а) *положительной*, если $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$;

б) *отрицательной*, если $\mu(A) \leq 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$;

в) *конечной*, если $\mu(A) \in \mathbb{R}$ для любого $A \in \mathcal{A}$;

г) *ограниченной*, если $|\mu(A)| \leq c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и любого $A \in \mathcal{A}$;

д) *ограниченной сверху*, если $\mu(A) \leq c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и любого $A \in \mathcal{A}$;

г) *ограниченной снизу*, если $\mu(A) \geq c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и любого $A \in \mathcal{A}$.

Замечание 1.3.1. Положительная мера μ на $\mathcal{A}$ монотонна в том смысле, что если $A \subset B$ $(A, B \in \mathcal{A})$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$. Действительно, в этом случае $\mu(B) = \mu(A + (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$.

Пример 1.3.1. Вероятность P на σ-алгебре $\mathcal{A}$ событий — подмножеств пространства Ω элементарных исходов — это конечная положительная мера на $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условию $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Пример 1.3.2 (дискретное пространство с мерой). Пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$, I конечно или счетно. В качестве σ-алгебры $\mathcal{A}$ возьмем $\mathcal{P}(\Omega)$ — множество всех подмножеств множества Ω. Пусть действительные числа m_i $(i \in I)$ таковы, что $\sum\limits_{i \in I} m_i^- < +\infty$. Используя известные из курса математического анализа свойства числовых рядов, нетрудно убедиться, что формула

$$\mu(A) = \sum_{i \in I\colon\ \omega_i \in A} m_i$$

задает меру μ на $\mathcal{P}(\Omega)$. Эта мера конечна тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i \in I} |m_i| < +\infty$.

Пример 1.3.3. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и X — интегрируемая случайная величина, то есть измеримая функция из Ω в $\mathbb{R}$, интегрируемая на Ω по вероятностной мере P. Тогда, как известно из курса "Функциональный анализ", формула

$$\mu_X(A) = \int\limits_A X \, \mathsf{dP} \quad (A \in \mathcal{A})$$

задает конечную меру μ_X на $\mathcal{A}$ ("σ-аддитивность интеграла Лебега" [2, гл. V, § 8, п. 4]).

Рассматривая так называемые "квазиинтегрируемые случайные величины" [1, § 9], [3, II.3] можно показать, что если X — случайная величина с $\mathsf{E}X^- < +\infty$, то вышеприведенная формула задает меру на $\mathcal{A}$, возможно принимающую значение $+\infty$.

Меры на σ-алгебре $\mathcal{A}$ являются функциями множества, и для них можно естественным образом определить некоторые алгебраические операции. Так, для произвольных мер μ_1, μ_2 формула $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$

$(A \in \mathcal{A})$ задает меру $\mu_1 + \mu_2$, аналогично определяется операция умножения меры на положительное число. Для произвольной меры μ естественно считать произведение $0 \cdot \mu$ мерой на $\mathcal{A}$ всюду равной нулю. Для конечных мер аналогичным образом корректно определяется разность и умножение на действительное число. Таким образом, если μ_1 и μ_2 конечные меры на $\mathcal{A}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то определена конечная мера $c_1\mu_1 + c_2\mu_2$.

Без труда проверяется, что если μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $D \in \mathcal{A}$, то формула

$$\mu_D(A) = \mu(D \cap A)$$

определяет меру μ_D на $\mathcal{A}$.

Отметим еще, что для двух мер μ_1, μ_2 на $\mathcal{A}$ запись $\mu_1 \le \mu_2$ означает, что $\mu_1(A) \le \mu_2(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

1.4 Разложение Хана–Жордана

Теорема 1.1 (Хан[1]). *Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω. Тогда найдется $D \in \mathcal{A}$ такое, что выполняются следующие два условия:*

(1) $\mathcal{A} \ni A \subset D \implies \mu(A) \le 0$,

(2) $\mathcal{A} \ni A \subset D^c \implies \mu(A) \ge 0$.

Доказательство. В доказательстве теоремы можно естественным образом выделить три части.

1. Введем класс $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{A} : \mathcal{A} \ni C \subset B \implies \mu(C) \le 0\}$. Этот класс не пуст, так как, очевидно, $\varnothing \in \mathcal{B}$. Он замкнут относительно объединений счетных наборов своих элементов. Действительно, если $B_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ и

[1]Ханс Хан (Hans Hahn, 1879–1934) — австрийский математик, внёсший вклад в развитие функционального анализа, топологии, теории множеств, вариационного исчисления, вещественного анализа, и теории порядка. (Википедия)

$\mathcal{A} \ni C \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, то

$$C = C \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = C \cap (B_1 + B_2 \setminus B_1 + \dots + B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j + \dots) =$$
$$= C \cap B_1 + C \cap (B_2 \setminus B_1) + \dots + C \cap (B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j) + \dots,$$

следовательно,

$$\mu(C) = \mu(C \cap B_1) + \mu(C \cap (B_2 \setminus B_1)) + \dots + \mu(C \cap (B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j)) + \dots$$

Так как каждое слагаемое в последней сумме неположительно по выбору множеств B_n, то и их сумма, $\mu(C)$, неположительна.

2. Обозначим: $\beta = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Так как $\varnothing \in \mathcal{B}$ и $\mu(\varnothing) = 0$, то β — хорошо определенный элемент промежутка $[-\infty, 0]$. Выберем в $\mathcal{B}$ такую последовательность множеств (B_n), что $\mu(B_n) \to \beta$ при $n \to \infty$, и положим $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $D \in \mathcal{B}$ и

$$\beta \le \mu(D) = \mu(B_n) + \mu(D - B_n) \le \mu(B_n) \to \beta \quad (n \to \infty),$$

откуда следует, что $\mu(D) = \beta$, и значит, в частности, $\beta > -\infty$.

3. Осталось показать, что для построенного D выполняется условие (2) в формулировке теоремы. Предположим противное:

$$\exists A_0 \in \mathcal{A} \ (A_0 \subset D^c, \ \mu(A_0) < 0).$$

Заметим, что $A_0 \notin \mathcal{B}$, так как в противном случае $A_0 + D \in \mathcal{B}$ и $\mu(A_0 + D) = \mu(A_0) + \mu(D) < \beta$, что невозможно. Таким образом, найдется $C \in \mathcal{A}$ такое, что $C \subset A_0$ и $\mu(C) > 0$ (так как $\mu(C) + \mu(A_0 - C) = \mu(A_0) \in \mathbb{R}$, то $\mu(C) \neq +\infty$).

Все множества, фигурирующие далее, будем считать принадлежащими $\mathcal{A}$.

Возьмем наименьшее натуральное k_1, для которого найдется множество $A_1 \subset A_0$ такое, что $\mu(A_1) \geq \frac{1}{k_1}$.

Рассмотрим теперь $A_0 - A_1$ с аналогичной точки зрения. Имеем: $\mu(A_0 - A_1) = \mu(A_0) - \mu(A_1) < \mu(A_0) < 0$, откуда выводим, что $A_0 - A_1 \notin \mathcal{B}$. Возьмем наименьшее натуральное k_2, для которого найдется множество $A_2 \subset A_0 - A_1$ такое, что $\mu(A_2) \geq \frac{1}{k_2}$.

Далее, с аналогичной точки зрения рассматриваем множество $A_0 - (A_1 + A_2)$ и получаем натуральное число k_3 и множество A_3.

Опишем индукционный шаг перехода от n к $n+1$. Пусть выбраны натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ согласно вышеизложенной конструкции. Тогда $\mu(A_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i) < \mu(A_0) < 0$, откуда $A_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \notin \mathcal{B}$. Возьмем наименьшее натуральное k_{n+1}, для которого найдется множество $A_{n+1} \subset A_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ такое, что $\mu(A_{n+1}) \geq \frac{1}{k_{n+1}}$.

Таким образом построены бесконечные последовательности $k_1, k_2, \ldots$ и $A_1, A_2, \ldots$ Обозначим: $A' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда

$$+\infty > \mu(A') = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}\ ,$$

откуда следует, что $\frac{1}{k_n} \to 0$, то есть $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Имеем, опять же: $\mu(A_0 - A') < 0$ и $A_0 - A' \notin \mathcal{B}$, поэтому найдутся такие натуральное число k и множество $C \subset A_0 - A'$, что $\mu(C) \geq \frac{1}{k}$. Значит, на некотором n-ном шаге построения мы были обязаны взять k, а не выбранное k_n, и C, а не выбранное A_n. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Пример 1.4.1. Для дискретного пространства с мерой из примера 1.3.2 в качестве множества D, фигурирующего в теореме 1.1, можно взять $\{\omega_i : m_i \leq 0\}$.

Пример 1.4.2. Для меры μ_X из примера 1.3.3 в качестве D можно взять $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 0\}$, или $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0\}$, или любое другое множество из $\mathcal{A}$, лежащее между двумя предыдущими.

Следствие 1.1. *Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, и пусть D — подмножество, фигурирующее в предыдущей теореме. Формулы*

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap D^c) \ (= \mu_{D^c}(A))$$
$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap D) \ (= -\mu_D(A)),$$

определяют положительные меры μ^+, μ^- на $\mathcal{A}$, причем $\mu = \mu^+ - \mu^-$ и мера μ^- ограничена.

Меры μ^+ и μ^- можно охарактеризовать следующим образом:

μ^+ — наименьшая из положительных мер μ' на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию

$$\mu(A) \leq \mu'(A) \text{ для любого } A \in \mathcal{A};$$

μ^- — наименьшая из положительных мер μ'' на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию

$$-\mu(A) \leq \mu''(A) \text{ для любого } A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство. Приведем только доказательство утверждения о характеризации, так как все остальные утверждения практически непосредственно следуют из конструкции μ^+ и μ^- с учетом того, что $\mu(A \cap D) \geq \beta$, где β — константа из теоремы 1.1.

Имеем для $A \in A$:

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) \leq \mu^+(A).$$

Если же μ' — такая положительная мера, что $\mu'(A) \geq \mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$, то

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap D^c) \leq \mu'(A \cap D^c) \leq \mu'(A),$$

то есть $\mu^+ \leq \mu'$.

Аналогично, для $A \in A$

$$-\mu(A) = \mu^-(A) - \mu^+(A) \le \mu^-(A)$$

и

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap D) \le \mu''(A \cap D) \le \mu''(A),$$

то есть $\mu^- \le \mu''$. □

Следствие 1.2. *a) Любая мера на σ-алгебре ограничена снизу.*

b) Для меры μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω эквивалентны следующие условия:

(i) μ ограничена,

(ii) μ конечна,

(iii) $\mu(\Omega) \neq +\infty$.

Доказательство. a) Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, и пусть D — множество, а β — константа, фигурирующие в теореме 1.1. Тогда для $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) \ge -\mu^-(A) \ge -\mu^-(\Omega) = \mu(D) = \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Импликации $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ тривиальны.

Докажем $(iii) \implies (i)$. Имеем:

$$|\mu(A)| = |\mu^+(A) - \mu^-(A)| \le \mu^+(A) + \mu^-(A) \le \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega),$$
$$\mu(\Omega) = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega).$$

Поэтому, если $\mu(\Omega) \neq +\infty$, то $\mu^+(\Omega) \neq +\infty$, следовательно, $\mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) \in \mathbb{R}$, и значит, μ ограничена. □

Следствие 1.3. *Любая конечная мера на σ-алгебре подмножеств непустого множества представляется как линейная комбинация вероятностей.*

1.5 Абсолютная непрерывность и сингулярность мер

Определение 1.6. Говорят, что мера ν на σ-алгебре $\mathcal{A}$ *абсолютно непрерывна* относительно положительной меры μ на $\mathcal{A}$, и обозначают $\nu \ll \mu$, если выполняется условие

$$A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Пример 1.5.1. Пусть μ_X — мера, ассоциированная с интегрируемой (или, более обще, квазиинтегрируемой с $\mathsf{E}X^- < +\infty$) случайной величиной X на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (пример 1.3.3). Тогда $\mu_X \ll \mathsf{P}$.

Определение 1.7. Говорят, что мера ν на σ-алгебре $\mathcal{A}$ *сингулярна* относительно меры μ на $\mathcal{A}$, и обозначают $\nu \perp \mu$, если

$$\exists N \in \mathcal{A}\ (\mathcal{A} \ni A \subset N \implies \mu(A) = 0,\ \mathcal{A} \ni A \subset N^c \implies \nu(A) = 0).$$

Замечание 1.5.1. Очевидно, что

$$\nu \perp \mu \iff \mu \perp \nu$$

и что для положительных мер условие сингулярности можно эаписать в виде:

$$\exists N \in \mathcal{A}\ (\mu(N) = 0,\ \nu(N^c) = 0).$$

Пример 1.5.2. Для произвольной меры μ справедливо $\mu^+ \perp \mu^-$ (см. следствие 1.1). Действительно, $\mu^+(D) = \mu^-(D^c) = 0$.

Предложение 1.1. *Пусть μ — положительная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и ν — такая мера на $\mathcal{A}$, что одновременно $\nu \ll \mu$ и $\nu \perp \mu$. Тогда ν тождественно равна нулю на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Возьмем множество $N \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu(N) = 0$ и $\nu(A) = 0$ для $\mathcal{A} \ni A \subset N^c$. Тогда для произвольного $A \in \mathcal{A}$ имеем: $\nu(A) = \nu(A \cap N) + \nu(A \cap N^c) = 0$. $\square$

1.6 Теорема Лебега о разложении меры

Лемма 1.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *— вероятностное пространство и* μ, μ_c, μ_s *— такие конечные меры на* $\mathcal{A}$*, что* $\mu_c \ll \mathsf{P}$, $\mu_s \perp \mathsf{P}$ *и* $\mu = \mu_c + \mu_s$*. Тогда указанными условиями меры* μ_c *и* μ_s *определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть μ'_c, μ'_s — такие конечные меры на $\mathcal{A}$, что $\mu'_c \ll \mathsf{P}$, $\mu'_s \perp \mathsf{P}$ и $\mu = \mu'_c + \mu'_s$. Тогда $\mu_c + \mu_s = \mu'_c + \mu'_s$, откуда $\mu_c - \mu'_c = \mu'_s - \mu_s$.

Конечная мера $\mu_c - \mu'_c$ абсолютно непрерывна относительно P, так как если $\mathsf{P}(A) = 0$, то $(\mu_c - \mu'_c)(A) = \mu_c(A) - \mu'_c(A) = 0$.

Проверим теперь, что $(\mu'_s - \mu_s) \perp \mathsf{P}$. Возьмем $N \in \mathcal{A}$ такое, что $\mathsf{P}(N) = 0$ и $\mu(A) = 0$ для $\mathcal{A} \ni A \subset N^c$. Аналогично, возьмем $N' \in \mathcal{A}$ такое, что $\mathsf{P}(N') = 0$ и $\mu'(A) = 0$ для $\mathcal{A} \ni A \subset N'^c$. Рассмотрим $N \cup N'$. Имеем: $\mathsf{P}(N \cup N') \le \mathsf{P}(N) + \mathsf{P}(N') = 0$ и $(\mu'_s - \mu_s)(A) = \mu'_s(A) - \mu_s(A) = 0$ для $\mathcal{A} \ni A \subset (N \cup N')^c = N^c \cap N'^c$, то есть $(\mu'_s - \mu_s) \perp \mathsf{P}$.

По предложению 1.1 $\mu_c - \mu'_c = \mu'_s - \mu_s \equiv 0$, откуда $\mu_c = \mu'_c$ и $\mu_s = \mu'_s$. $\square$

Если две интегрируемые случайные величины X и X' на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ совпадают почти наверное ($X \overset{\text{п.н.}}{=} X'$), то, как следует из одного из свойств интеграла Лебега, порожденные ими меры μ_X и $\mu_{X'}$ на $\mathcal{A}$ (пример 1.3.3) совпадают. Верно и обратное утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть* X *и* X' *— две интегрируемые случайные величины на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *такие, что порожденные ими меры* μ_X *и* $\mu_{X'}$ *на* $\mathcal{A}$ *совпадают. Тогда* $X \overset{\text{п.н.}}{=} X'$.

Доказательство. Пусть $B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) - X'(\omega) > 0\}$ и $B_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) - X'(\omega) \ge \frac{1}{n}\}$. Отметим, что $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Имеем:

$$0 = \mu_X(B_n) - \mu_{X'}(B_n) = \int\limits_{B_n} (X - X')\, \mathsf{dP} \ge \frac{1}{n}\mathsf{P}(B_n),$$

что возможно только когда $\mathsf{P}(B_n) = 0$. Но тогда $\mathsf{P}(B) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_n) = 0$, то есть $\mathsf{P}(B) = 0$. Аналогично, $\mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X'(\omega) - X(\omega) > 0\}) = 0$. Таким образом, $X \overset{\text{п.н.}}{=} X'$. $\square$

Теорема 1.2 (Лебег[2])**.** *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *— вероятностное пространство и* μ *— конечная (и положительная) мера на* $\mathcal{A}$*. Тогда существуют интегрируемая (и положительная) случайная величина* X *и множество* $N \in \mathcal{A}$ *с* $\mathsf{P}(N) = 0$ *такие, что*

$$\mu(A) = \int\limits_A X \, \mathsf{dP} + \mu(A \cap N) \quad (A \in \mathcal{A}). \tag{$*$}$$

Это разложение μ *в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной относительно* P *ограниченных мер единственно,* X *определяется единственным образом с точностью до почти наверное.*

В случае, когда мера μ *положительна,* X *есть почти наверное наибольшая среди всех случайных величин* X'*, удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_A X' \, \mathsf{dP} \le \mu(A)$$

при всех $A \in \mathcal{A}$*.*

Доказательство. 1. Без труда проверяется, что для указанных в формулировке теоремы X и N формула $(*)$ действительно задает разложение μ в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной ограниченных мер.

2. Справедливость утверждений о единственности следует из лемм 1.1 и 1.2.

3. Покажем, что достаточно ограничиться случаем положительных мер. Предположим теорему доказанной для положительных мер. Произвольную

[2]Анри Леон Лебег (Henri Léon Lebesgue, 1875–1941) — французский математик, член Парижской АН (1922), член-корреспондент АН СССР (1929), профессор Парижского университета (с 1910). Наиболее известен как автор теории интегрирования (так называемый интеграл Лебега), обобщающей обычное определение интеграла на более широкий класс функций. Интеграл Лебега нашёл широкое применение в теории вероятностей. (Википедия)

конечную меру можно согласно следствию 1.1 представить в виде разности двух положительных конечных мер: $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Согласно сделанному предположению, найдутся положительные интегрируемые случайные величины X_1, X_2 и множества $N_1, N_2 \in \mathcal{A}$ с $\mathsf{P}(N_1) = \mathsf{P}(N_2) = 0$ такие, что

$$\mu^+(A) = \int_A X_1 \,\mathsf{dP} + \mu^+(A \cap N_1), \quad \mu^-(A) = \int_A X_2 \,\mathsf{dP} + \mu^-(A \cap N_2) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) &= \\ &= \int_A (X_1 - X_2) \,\mathsf{dP} + \mu(D^c \cap A \cap N_1) + \mu(D \cap A \cap N_2) = \\ &= \int_A (X_1 - X_2) \,\mathsf{dP} + \mu((D^c \cap N_1 + D \cap N_2) \cap A), \end{aligned}$$

где D — множество из теоремы 1.1. Остается заметить, что $\mathsf{P}(D^c \cap N_1 + D \cap N_2) = 0$.

Далее предполагаем, что μ — конечная положительная мера, и строим требуемые X и N.

4. Рассмотрим класс $\mathcal{X}$ положительных случайных величин X', удовлетворяющих условию

$$\int_A X' \,\mathsf{dP} \leq \mu(A)$$

при всех $A \in \mathcal{A}$. Этот класс непуст (так как $0 \in \mathcal{X}$). Если $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, то $\max\{X_1, X_2\} \in \mathcal{X}$. Действительно, пусть $B = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \geq X_2(\omega)\}$. Тогда для $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A \max\{X_1, X_2\} \,\mathsf{dP} = \int_{A \cap B} X_1 \,\mathsf{dP} + \int_{A \cap B^c} X_2 \,\mathsf{dP} \leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A).$$

5. Положим

$$\alpha = \sup_{X' \in \mathcal{X}} \int_\Omega X' \,\mathsf{dP}.$$

Ясно, что $\alpha \leq \mu(\Omega) < \infty$. Возьмем последовательность (X_n) случайных величин из $\mathcal{X}$ такую, что $\int_\Omega X_n \,\mathsf{dP} \to \alpha$, и положим $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$.

Тогда (Y_n) — возрастающая последовательность случайных величин из класса $\mathcal{X}$, $\int\limits_\Omega Y_n \,\mathsf{dP} \le \alpha$, поэтому, согласно теореме Беппо Леви [2, гл. 5, § 5, теорема 7], (Y_n) почти наверное сходится к положительной интегрируемой случайной величине X и $\int\limits_\Omega X \,\mathsf{dP} = \lim \int\limits_\Omega Y_n \,\mathsf{dP} \le \alpha$. Более того, для любого $A \in A$

$$\int\limits_A X \,\mathsf{dP} = \lim \int\limits_A Y_n \,\mathsf{dP} \le \mu(A),$$

то есть $X \in \mathcal{X}$. Имеем также:

$$\alpha \ge \int\limits_\Omega X \,\mathsf{dP} \ge \int\limits_\Omega Y_n \,\mathsf{dP} \ge \int\limits_\Omega X_n \,\mathsf{dP} \to \alpha,$$

что влечет $\int\limits_\Omega X \,\mathsf{dP} = \alpha$.

6. Покажем, что построенная случайная величина X почти наверное наибольшая в классе $\mathcal{X}$. Пусть $X' \in \mathcal{X}$ и $B = \{\omega \in \Omega : X'(\omega) > X(\omega)\}$. Тогда $\max\{X, X'\} \in \mathcal{X}$ и

$$\begin{aligned}\alpha &\ge \int\limits_\Omega \max\{X, X'\} \,\mathsf{dP} = \int\limits_B X' \,\mathsf{dP} + \int\limits_{B^c} X \,\mathsf{dP} = \\ &= \int\limits_B (X' - X) \,\mathsf{dP} + \int\limits_B X \,\mathsf{dP} + \int\limits_{B^c} X \,\mathsf{dP} = \int\limits_B (X' - X) \,\mathsf{dP} + \alpha,\end{aligned}$$

следовательно, $\int\limits_B (X' - X) \,\mathsf{dP} = 0$. Как в доказательстве леммы 1.2 отсюда получаем, что $\mathsf{P}(B) = 0$, а это означает, что $X \ge X'$ почти наверное.

7. Определим конечную положительную меру $\widetilde{\mu}$:

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(A) - \int\limits_A X \,\mathsf{dP} \quad (A \in \mathcal{A}),$$

и для каждой меры $\widetilde{\mu} - \frac{1}{n}\mathsf{P}$ $(n \in \mathbb{N})$ найдем согласно теореме 1.1 соответствующие множества D_n. Таким образом, для любого $A \in \mathcal{A}$

$$(\widetilde{\mu} - \frac{1}{n}\mathsf{P})(A \cap D_n) \le 0, \text{ то есть } \widetilde{\mu}(A \cap D_n) \le \frac{1}{n}\mathsf{P}(A \cap D_n);$$

$$(\widetilde{\mu} - \frac{1}{n}\mathsf{P})(A \cap D_n^c) \ge 0, \text{ то есть } \widetilde{\mu}(A \cap D_n^c) \ge \frac{1}{n}\mathsf{P}(A \cap D_n^c).$$

Положим $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n^c$. Докажем, что $\mathsf{P}(N) = 0$. Для этого достаточно показать, что $\mathsf{P}(D_n^c) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а для этого достаточно проверить, что $X + \frac{1}{n}1_{D_n^c} \in \mathcal{X}$. Для любого $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\int\limits_A (X + \tfrac{1}{n}1_{D_n^c})\,\mathsf{dP} &= \int\limits_A X\,\mathsf{dP} + \int\limits_A \tfrac{1}{n}1_{D_n^c}\,\mathsf{dP} = \int\limits_A X\,\mathsf{dP} + \tfrac{1}{n}\mathsf{P}(A \cap D_n^c) \leq \\ &\leq \int\limits_A X\,\mathsf{dP} + \widetilde{\mu}(A \cap D_n^c) \leq \int\limits_A X\,\mathsf{dP} + \widetilde{\mu}(A) = \mu(A),\end{aligned}$$

то есть $X + \frac{1}{n}1_{D_n^c} \in \mathcal{X}$ и, таким образом, $\mathsf{P}(N) = 0$.

С другой стороны, $\widetilde{\mu}(N^c) = 0$, так как $0 \leq \widetilde{\mu}(N^c) = \widetilde{\mu}\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (D_n^c)^c\big) \leq \widetilde{\mu}(D_n) \leq \frac{1}{n}\mathsf{P}(D_n) \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, $\widetilde{\mu} \perp \mathsf{P}$, и остается отметить, что для $A \in \mathcal{A}$

$$\widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(A \cap N) + \widetilde{\mu}(A \cap N^c) = \mu(A \cap N) - \int\limits_{A \cap N} X\,\mathsf{dP} + 0 = \mu(A \cap N).$$

□

Замечание 1.6.1. Для дискретного вероятностного пространства указанные в теореме 1.2 случайную величину X и множество N легко выписываются непосредственно. Действительно, пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$, I конечно или счетно, $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$, $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{i \in I:\ \omega_i \in A} p_i$ $(A \subset \Omega)$. Конечную меру μ строим как в примере 1.3.2. Тогда $N = \{\omega_i : p_i = 0\}$, а X можно определить как

$$X(\omega_i) = \begin{cases} \dfrac{m_i}{p_i}, \text{ если } p_i > 0; \\ 0, \text{ если } p_i = 0. \end{cases}$$

Лемма 1.3. *Любая положительная случайная величина на вероятностном пространстве может быть представлена как поточечный предел возрастающей последовательности положительных ступенчатых случайных величин.*

Доказательство. Пусть X — положительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Для $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$ положим

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k + \dfrac{l}{2^n}, \text{ если } k + \dfrac{l}{2^n} \le X(\omega) < k + \dfrac{l+1}{2^n} \ (0 \le k < n,\ 0 \le l \le 2^n - 1); \\ \\ n, \text{ если } X(\omega) \ge n. \end{cases}$$

Тогда $X_n \in \mathrm{St}^+(\Omega, \mathcal{A})$ и непосредственно проверяется, что $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. □

Замечание 1.6.2. Пусть X — положительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и (X_n) — возрастающая последовательность из $\mathrm{St}^+(\Omega, \mathcal{A})$, поточечно сходящаяся к X. Из теоремы Беппо Леви следует, что X интегрируема тогда и только тогда, когда $\lim \mathsf{E}X_n < +\infty$, и в этом случае $\lim \mathsf{E}X_n = \mathsf{E}X$.

Предложение 1.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *— вероятностное пространство. Функция* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *является случайной величиной тогда и только тогда, когда она представляется как поточечный предел некоторой последовательности ступенчатых случайных величин.*

Доказательство. Поточечный предел последовательности случайных величин является случайной величиной согласно [2, гл. V, § 4, теорема 4].

Любая случайная величина X представляется в виде разности положительных: $X = X^+ - X^-$. Согласно лемме 1.3 в $\mathrm{St}^+(\Omega, \mathcal{A})$ найдутся последовательности (X'_n) и (X''_n) поточечно сходящиеся к X^+ и X^- соответственно. Тогда последовательность $(X'_n - X''_n)$ ступенчатых случайных величин поточечно сходится к X. □

Следствие 1.4 (теорема Радона[3]–Никодима[4] для вероятностей). *Пусть* P_1 *и* P_2 *— две вероятности на* σ*-алгебре событий* $\mathcal{A}$*, причем* $\mathsf{P}_2 \ll \mathsf{P}_1$*. Тогда существует и определяется однозначно с точностью до* P_1*-почти наверное* P_1*-интегрируемая положительная случайная величина* X *такая, что*

$$\mathsf{P}_2(A) = \int\limits_A X \,\mathsf{dP}_1 \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Случайная величина Y P_2*-интегрируема тогда и только тогда, когда* YX P_1*-интегрируема, и в этом случае*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y \equiv \int\limits_\Omega Y \,\mathsf{dP}_2 = \int\limits_\Omega YX \,\mathsf{dP}_1 \equiv \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(YX). \tag{$*$}$$

Доказательство. Первое утверждение формулировки следствия непосредственно получается из теоремы 1.2, так как тривиальное равенство $\mathsf{P}_2(A) = \mathsf{P}_2(A) + 0$ задает разложение P_2 в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярной относительно P_1 ограниченных мер.

Докажем второе утверждение.

а) Пусть $Y = 1_A$ $(A \in \mathcal{A})$. Тогда $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y = \mathsf{P}_2(A)$. С другой стороны, $\int\limits_\Omega YX \,\mathsf{dP}_1 = \int\limits_A X \,\mathsf{dP}_1 = \mathsf{P}_2(A)$. Таким образом, равенство $(*)$ выполнено для Y вида 1_A.

б) Пусть $Y \in \mathrm{St}(\Omega, \mathcal{A})$, то есть $Y = \sum\limits_{i=1}^n y_i 1_{A_i}$. Тогда

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y = \sum_{i=1}^n y_i (\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} 1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n y_i (\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(1_{A_i} X)) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(YX).$$

в) Пусть, теперь, случайная величина Y положительна и P_2-интегрируема. Возьмем некоторую последовательность (Y_n) из $\mathrm{St}^+(\Omega, \mathcal{A})$, возрастая

[3]Иоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрийский математик. Радон известен как автор нескольких важных математических результатов, в частности: теорема Радона–Никодима; мера Радона в теории меры, как линейного функционала; преобразование Радона в интегральной геометрии, основа математического обеспечения томографов. (Википедия)

[4]Отто Мартин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польский математик.

сходящуюся к Y (лемма 1.3). Тогда $Y_n X$ возрастая сходится к YX и, учитывая теорему Беппо Леви, получаем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y = \lim \mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y_n = \lim \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(Y_n X) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(YX).$$

г) В общем случае $Y = Y^+ - Y^-$ и, как нетрудно видеть, $(YX)^+ = Y^+X$, $(YX)^- = Y^-X$. Тогда

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y^+ - \mathsf{E}_{\mathsf{P}_2} Y^- = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(Y^+X) - \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(Y^-X) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(YX).$$

□

Случайную величину X, фигурирующую в следствии 1.4, называют *производной Радона–Никодима* вероятности P_2 по вероятности P_1 и обычно обозначают $\dfrac{\mathsf{dP}_2}{\mathsf{dP}_1}$.

Упражнения

Упражнение 1.1. Для меры μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ положим: $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Доказать, что $|\mu|$ — наименьшая из положительных мер μ' на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию: $|\mu(A)| \leq \mu'(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1.2. Для σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω обозначим через $M(\mathcal{A})$ совокупность всех конечных мер на $\mathcal{A}$. Показать, что

a) с естественными операциями сложения и умножения на вещественные скаляры $M(\mathcal{A})$ является линейным пространством;

b) формула $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ задает норму на $M(\mathcal{A})$;

c) пространство $(M(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ банахово.

Упражнение 1.3. Пусть μ, ν — две меры на σ-алгебре $\mathcal{A}$, причем мера μ положительна. Доказать, что эквивалентны следующие условия:

(i) $\nu \ll \mu$,

(ii) $\nu^+, \nu^- \ll \mu$,

(iii) $|\nu| \ll \mu$.

Упражнение 1.4. Доказать, что для мер μ, ν на σ-алгебре $\mathcal{A}$ эквивалентны условия:

(i) $\nu \perp \mu$,

(ii) $\nu^+, \nu^- \perp \mu$,

(iii) $|\nu| \perp \mu$.

Упражнение 1.5. Доказать, что для меры μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ меры μ^+ и μ^- однозначно определяются свойствами:

а) μ^+, μ^- положительны;

(ii) $\mu = \mu^+ - \mu^-$;

(iii) $\mu^+ \perp \mu^-$.

Упражнение 1.6. Пусть $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \mathsf{P}_3$ — три вероятности на σ-алгебре событий $\mathcal{A}$, причем $\mathsf{P}_3 \ll \mathsf{P}_2 \ll \mathsf{P}_1$. Проверить, что $\mathsf{P}_3 \ll \mathsf{P}_1$ и $\dfrac{\mathsf{dP}_3}{\mathsf{dP}_1} = \dfrac{\mathsf{dP}_3}{\mathsf{dP}_2}\dfrac{\mathsf{dP}_2}{\mathsf{dP}_1}$.

Примечания и дополнения

Объект, который мы изучали в данном разделе и называли мерой, в книге [2] именуется зарядом, а термин мера используется только для положительных функций множеств. При определении меры на σ-алгебре (определение 1.4) мы могли бы считать, как это часто делается (например, в [5]), областью значений меры всю расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Однако, предположение, что мера на σ-алгебре действительно принимает оба значения $+\infty$ и $-\infty$, приводит к противоречию со свойством аддитивности.

В то же время, отказавшись от требования, что мера обязательно должна быть определенной на всех элементах рассматриваемой σ-алгебры, можно предложить конструкцию так называемых “частичных мер”, возможно принимающих оба бесконечных значения [6]. В рамках такого подхода обобщается ряд классических утверждений теории меры. Отметим следующий содержательный пример.

Пример 1.6.1. Пусть $X \to \overline{\mathbb{R}}$ — действительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ в рамках [3], $\mu(A) = \int\limits_A X \, \mathsf{dP}$, если X квазиинтегрируема на множестве $A \in \mathcal{A}$; на других $A \in \mathcal{A}$ значения μ не определяем. Тогда μ — "максимальная" частичная мера на $\mathcal{A}$.

2 Условные математические ожидания

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра σ-алгебры событий $\mathcal{A}$. Ограничение $\mathsf{P}|_{\mathcal{B}}$ вероятности P на подалгебру $\mathcal{B}$, очевидно, является вероятностью на $\mathcal{B}$. Будем обозначать ее $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$. Таким образом, имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}_{\mathcal{B}})$. Ясно, что если случайная величина X на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ является $\mathcal{B}$-измеримой (то есть $X^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}$, где через $\mathcal{R}$ обозначена борелевская σ-алгебра числовой прямой), то X есть случайная величина на $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}_{\mathcal{B}})$. Очевидно и обратное: любая случайная величина на $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}_{\mathcal{B}})$ есть $\mathcal{B}$-измеримая случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Более того, непосредственно из определения интеграла Лебега следует, что для $\mathcal{B}$-измеримой интегрируемой случайной величины X и любого $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство $\int\limits_B X \, \mathsf{dP} = \int\limits_B X \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}}$.

2.1 Условное математическое ожидание относительно подалгебры

Определение 2.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. *Условным математическим ожиданием* интегрируемой случайной величины X относительно $\mathcal{B}$ называется $\mathcal{B}$-измеримая случайная величина $\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_B \mathsf{E}^{\mathcal{B}} X \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}} = \int\limits_B X \, \mathsf{dP} \quad \text{для любого } B \in \mathcal{B}.$$

Пример 2.1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\{B_i\}_{i \in I}$ — измеримое конечное или счетное разбиение Ω, то есть I конечно или счетно, $B_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I)$ и $\sum\limits_{i \in I} B_i = \Omega$. Рассмотрим в качестве $\mathcal{B}$ σ-алгебру, порожденную $\{B_i\}_{i \in I}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{B} = \Big\{ \sum\limits_{i \in I_0} B_i \, : \, I_0 \subset I \Big\}$. Для интегрируемой случайной величины X условное математическое ожидание относительно $\mathcal{B}$, которое еще называют условным математическим ожиданием относительно разбиения $\{B_i\}_{i \in I}$, определяется равенством

$$(\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathsf{P}(B_i)} \displaystyle\int\limits_{B_i} X \, \mathsf{dP}, \text{ если } \omega \in B_i, \ \mathsf{P}(B_i) > 0; \\ c_i, \text{ если } \omega \in B_i, \ \mathsf{P}(B_i) = 0; \end{cases}$$

где константы c_i можно взять произвольные.

Теорема 2.1. *Для любой интегрируемой случайной величины на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *и любой* σ*-подалгебры* $\mathcal{B}$ σ*-алгебры* $\mathcal{A}$ *условное математическое ожидание относительно* $\mathcal{B}$ *существует и определяется однозначно с точностью до* $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$*-почти наверное.*

Доказательство. Для интегрируемой случайной величины X рассмотрим порожденную ей конечную меру μ на $\mathcal{A}$ $\Big(\mu(A) = \int\limits_A X \, \mathsf{dP}\Big)$ и ее ограничение $\mu_{\mathcal{B}}$ на подалгебру $\mathcal{B}$. Так как $\mu \ll \mathsf{P}$, то $\mu_{\mathcal{B}} \ll \mathsf{P}_{\mathcal{B}}$. По теореме 1.2 существует и определяется однозначно с точностью до $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$-почти наверное $\mathcal{B}$-измеримая случайная величина $\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X$ такая, что $\mu_{\mathcal{B}}(B) = \int\limits_B \mathsf{E}^{\mathcal{B}} X \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}}$ $(B \in \mathcal{B})$, то есть для $B \in \mathcal{B}$ имеем:

$$\int\limits_B \mathsf{E}^{\mathcal{B}} X \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}} = \mu_{\mathcal{B}}(B) = \mu(B) = \int\limits_B X \, \mathsf{dP}.$$

□

2.2 Свойства условного математического ожидания относительно подалгебры

В этом подразделе мы будем писать $X \simeq Y$ для обозначения того, что две $\mathcal{B}$-измеримые случайные величины X и Y совпадают почти наверное относительно вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}_B)$.

1) *Для любой интегрируемой случайной величины* X *условное математическое ожидание* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$ *является интегрируемой случайной величиной относительно вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}_B)$ *и* $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_{\mathcal{B}}}(\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}X$.

2) *Если* X $\mathcal{B}$*-измерима, то* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X \simeq X$. *В частности,* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X) \simeq \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$, $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}\,0 \simeq 0$, $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}\,1 \simeq 1$ (здесь случайные величины 0 и 1 — константы на Ω).

3) *Если случайные величины* X_1 *и* X_2 *почти наверное совпадают, то* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_1 \simeq \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_2$.

4) *Если* $X \geq 0$*, то* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X \geq 0$ $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$*-почти наверное.*

5) *Для* $c \in \mathbb{R}$ *имеем:* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(cX) \simeq c\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$.

6) $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(X_1 + X_2) \simeq \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_1 + \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_2$.

7) *Если* $X_1 \geq X_2$*, то* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_1 \geq \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_2$ $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$*-почти наверное.*

8) *Если последовательность* (X_n) *положительных случайных величин возрастая сходится к* X*, то последовательность* $(\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X_n)$ $\mathsf{P}_{\mathcal{B}}$*-почти наверное возрастая сходится к* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$.

9) *Если случайная величина* Y $\mathcal{B}$*-измерима и ограничена, то* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(YX) \simeq Y\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$.

10) *Пусть* $\mathcal{B}'$ *—* σ*-подалгебра* σ*-алгебры* $\mathcal{B}$. *Тогда с точностью до* $\mathsf{P}_{\mathcal{B}'}$*-почти наверное выполняется равенство* $\mathsf{E}^{\mathcal{B}'}(\mathsf{E}^{\mathcal{B}}X) = \mathsf{E}^{\mathcal{B}'}X$.

Замечание 2.2.1. Напомним, что пространство $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ или просто $L_1(\mathsf{P})$ определяется как банахово пространство (см., напр., [4]), элементами которого являются классы эквивалентных интегрируемых случайных величин, то есть классы интегрируемых случайных величин, совпадающих почти наверное, а норма задается равенством $\|X\| = \mathsf{E}|X|$. Нетрудно понять, что $L_1(\mathsf{P}_{\mathcal{B}})$ можно рассматривать как подпространство пространства $L_1(\mathsf{P})$.

Из определения 2.1 и свойств 1), 3) видно, что отображение $X \mapsto \mathsf{E}^{\mathcal{B}}X$ корректно определяет оператор в пространстве $L_1(\mathsf{P})$ который будем обозначать $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}$; свойства 4) и 6) означают, что этот оператор линеен. Покажем, что оператор $\mathsf{E}^{\mathcal{B}} : L_1(\mathsf{P}) \to L_1(\mathsf{P})$ ограничен и найдем его норму. Для $X \geq 0$ имеем, учитывая свойство 4):

$$\|\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X\| = \int\limits_{\Omega} |\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X| \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}} = \int\limits_{\Omega} \mathsf{E}^{\mathcal{B}} X \, \mathsf{dP}_{\mathcal{B}} = \int\limits_{\Omega} X \, \mathsf{dP} = \|X\|.$$

Для произвольного X:

$$\begin{aligned}\|\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X\| &= \|\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(X^+ - X^-)\| = \|\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X^+ - \mathsf{E}^{\mathcal{B}} X^-\| \leq \\ &\leq \|\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X^+\| + \|\mathsf{E}^{\mathcal{B}} X^-\| = \|X^+\| + \|X^-\| = \|X^+ + X^-\| = \|X\|.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}$ ограничен и $\|\mathsf{E}^{\mathcal{B}}\| = 1$.

2.3 Условное математическое ожидание относительно случайной величины

Определение 2.2. Пусть X — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. *$\sigma$-алгеброй, порожденной X,* называется наименьшая σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, относительно которой X измерима.

Таким образом определенную σ-алгебру будем обозначать $\mathcal{B}(X)$. Как следует из определения измеримости, $\mathcal{B}(X) = X^{-1}(\mathcal{R})$.

Определение 2.3. *Условным математическим ожиданием* интегрируемой случайной величины Y *относительно случайной величины* X называется величина

$$\mathsf{E}^X Y = \mathsf{E}^{\mathcal{B}(X)} Y.$$

Предложение 2.1. *Пусть X — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Случайная величина Y на этом же вероятностном пространстве является $\mathcal{B}(X)$-измеримой тогда и только тогда, когда она допускает представление $Y = \varphi(X)$, где φ — борелевская функция, то есть измеримое отображение измеримого пространства $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ в себя.*

Доказательство. Если $Y = \varphi(X)$, то $\mathcal{B}(X)$-измеримость Y вытекает из $\mathcal{B}(X)$-измеримости X и измеримости суперпозиции измеримых отображений [2, гл. V, § 4, теорема 1].

Пусть, теперь, Y — $\mathcal{B}(X)$-измеримая случайная величина. Более того, предположим сначала, что Y — ступенчатая. Таким образом, Y представляется в виде

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{B_i},$$

где $y_i \in \mathbb{R}$, $B_i \in \mathcal{B}(X)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. Так как $B_i \in \mathcal{B}(X)$, то $B_i = X^{-1}(S_i)$, где $S_i \in \mathcal{R}$. Положим $S_1' = S_1$, $S_i' = S_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} S_j$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $S_0' = \mathbb{R} - \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i'$. Тогда $S_i' \in \mathcal{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\sum\limits_{i=0}^{n} S_i' = \mathbb{R}$, $X^{-1}(S_1') = B_1$ и $X^{-1}(S_i') = X^{-1}(S_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} S_j) = B_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} B_j = B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Определим ступенчатую борелевскую функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_i, \text{ если } x \in S_i' \ (i = 1, 2, \ldots, n); \\ 0, \text{ если } x \in S_0'. \end{cases}$$

Тогда $Y = \varphi(X)$, так как, если $\omega \in B_i$, то $Y(\omega) = y_i$, а с другой стороны $X(\omega) \in S_i'$, значит, $\varphi(X(\omega)) = y_i$.

Для произвольной $\mathcal{B}(X)$-измеримой случайной величины Y выберем в $\mathrm{St}(\Omega, \mathcal{B}(X))$ последовательность (Y_n), поточечно сходящуюся к Y, и представим каждую Y_n в виде $Y_n = \varphi_n(X)$. Для последовательности (φ_n) борелевских функций построим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lim \varphi_n(x), \text{ если } (\varphi_n(x)) \text{ сходится}; \\ 0, \text{ если } (\varphi_n(x)) \text{ расходится}. \end{cases}$$

Тогда для $\omega \in \Omega$

$$Y(\omega) = \lim Y_n(\omega) = \lim \varphi_n(X(\omega)) = \varphi(X(\omega)),$$

и осталось убедится, что функция φ измерима по Борелю. Как известно, поточечный предел измеримых функций есть измеримая функция [2, гл. V, § 4, теорема 4], поэтому для доказательства измеримости φ достаточно показать, что множество $S = \{x \in \mathbb{R} : (\varphi_n(x)) \text{ сходится}\}$ измеримо по Борелю. Для чисел $n, m, k \in \mathbb{N}$ рассмотрим измеримые по Борелю множества $S_{nmk} = \{x \in \mathbb{R} : |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \frac{1}{k}\}$. Используя тот факт, что числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, можно проверить, что $S = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{n>N,m>N} S_{nmk}\right)\right)$, что влечет борелевость множества S.

□

Из определения 2.3 и предложения 2.1 следует, что условное математическое ожидание интегрируемой случайной величины Y относительно случайной величины X допускает представление $\mathsf{E}^X Y = \varphi(X)$, где φ — некоторая борелевская функция.

Упражнения

Упражнение 2.1. Пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^5$ — дискретное вероятностное пространство с $p_i = \frac{1}{5}$. Найти условное математическое ожидание случайной величины $X(\omega_i) = i$ относительно подалгебры, порожденной событиями $A = \{\omega_i\}_{i=1}^3$ и $B = \{\omega_i\}_{i=3}^5$.

Упражнение 2.2. Пусть $\Omega = [0,1]$, P — вероятность, соответствующая равномерному распределению на $[0,1]$, $X(\omega) = \omega$ $(\omega \in [0,1])$, и пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\{[0,\frac{2}{3}],[\frac{1}{3},1]\})$ — подалгебра, порожденная отрезками $[0,\frac{2}{3}]$ и $[\frac{1}{3},1]$. Найти условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathcal{B}}(1+X)$.

Упражнение 2.3. В рамках предыдущего упражнения, пусть $Y = 1_{[\frac{1}{2},1]}$. Найти $\mathsf{E}^X Y$ и $\mathsf{E}^Y X$.

Список литературы

[1] Володин И. Н. Математические основы вероятности: учебное пособие / И. Н. Володин, О. Е. Тихонов, Е. А. Турилова. – Казань: Казан. ун-т, 2006. – 164 с.

[2] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.

[3] Невё Ж. Математические основы теории вероятностей / Ж. Невё. – М.: Мир, 1969. – 310 с.

[4] Сидоров А. М. Функциональный анализ: учебное пособие / А. М. Сидоров. – Казань: Казан. ун-т, 2010. – 140 с.

[5] Халмош П. Теория меры / П. Халмош. – М.: ИЛ, 1953. – 292 с.

[6] Tikhonov O. E. Partial measures / O. E. Tikhonov // Lobachevskii J. Math. – 2000. – Vol. 6. – P. 47–50.